Interrogation n°8 – Espaces préhilbertiens

(sujet A) Corrigé

NOM : .... Prénom : .... Note :

1. Soit E un espace préhilbertien dont on note $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ le produit scalaire. Énoncer l'inégalité de Cauchy-Scwharz (avec le cas d'égalité).

   Cf cours.

2. Soit E un espace préhilbertien dont on note $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ le produit scalaire. Soit X une partie de E. Rappeler la définition ensembliste de $X^\perp$. Que peut-on dire entre X et $(X^\perp)^\perp$ (sans le démontrer) ?

   $X^\perp = \{v \in E \mid \forall u \in X \quad \langle v \,|\, u \rangle = 0\}$
   $X \subset (X^\perp)^\perp$

3. On munit $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire canonique. On pose

$$u_1 = (1,1,0) \qquad u_2 = (1,0,1) \qquad F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$$

   (a) Construire une base orthonormée de F par l'algorithme de Gram-Schmidt.
   (b) Déterminer le projeté orthogonal de $v = (1,2,3)$ sur F, puis la distance de v à F.

   (a) On pose $e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$. Or, $\|u_1\| = \sqrt{1^2+1^2+0^2} = \sqrt{2}$. Donc

$$e_1 = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)}$$

   On pose $v_2 = u_2 - \langle u_2 \,|\, e_1 \rangle e_1$. Or,

$$\langle u_2 \,|\, e_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

   de sorte que

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   On pose $e_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|}$. Or,

$$\|v_2\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{2}\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

   Ainsi,

$$e_2 = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{6}}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

   Finalement, on obtient une famille (e_1, e_2) orthonormée qui est une base de F.

   (b) Le projeté orthogonal de v sur F est

$$p_F(v) := \langle v \,|\, e_1 \rangle e_1 + \langle v \,|\, e_2 \rangle e_2$$

Or,

$$\langle v \mid e_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \times (1+2) = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\langle v \mid e_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \times (1-2+6) = \frac{5}{\sqrt{6}}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} p_F(v) &= \frac{3}{2}(1,1,0) + \frac{5}{6}(1,-1,2) \\ &= \frac{1}{6}\left[9(1,1,0) + 5(1,-1,2)\right] \\ &= \frac{1}{6} \times (14,4,10) \\ &= \boxed{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} d(v,F) &= \|v - p_F(v)\| \\ &= \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\| \\ &= \left\| \begin{pmatrix} -4/3 \\ 4/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} \right\| \\ &= \frac{4}{3}\left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| \\ &= \frac{4}{3}\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2} \\ &= \boxed{\frac{4}{\sqrt{3}}} \end{aligned}$$

Interrogation n°8 – Espaces préhilbertiens

(sujet B) Corrigé

NOM : .... Prénom : .... Note :

1. Compléter les identités remarquables suivantes (pour la seconde, on ne donnera qu'une seule expression, au choix) :

   $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x \mid y\rangle$

   $\langle x \mid y\rangle = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$

2. Soit E un espace préhilbertien dont on note $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ le produit scalaire. Énoncer l'inégalité de Cauchy-Scwharz (avec le cas d'égalité).

   Cf cours.

3. Soit E un espace préhilbertien dont on note $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ le produit scalaire. Soit F et G deux s.e.v. de E. Montrer que $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

   On raisonne par double inclusion.

   — Soit $v \in (F+G)^\perp$. Montrons que $v \in F^\perp \cap G^\perp$, i.e. $v \in F^\perp$ et $v \in G^\perp$, i.e.

   $$\forall u \in F \quad \langle v \mid u\rangle = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall u' \in G \quad \langle v \mid u\rangle = 0$$

   Or, comme $v \in (F+G)^\perp$, on sait que : $\forall w \in F+G \quad \langle v \mid w\rangle = 0$. Soit $u \in F$. Comme $u = \underbrace{u}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G}$, on en déduit que $u \in F+G$. Ainsi, $\langle v \mid u\rangle = 0$. Donc $v \in F^\perp$. De même, on montre que $v \in G^\perp$. Ainsi, $v \in F^\perp \cap G^\perp$.

   — Soit $v \in F^\perp \cap G^\perp$. Montrons que $v \in (F+G)^\perp$, i.e. $\forall u \in F+G \quad \langle v \mid u\rangle = 0$. Soit $u \in F+G$. On peut donc poser $u = u_F + u_G$ avec $u_F \in F$ et $u_G \in G$. Montrons que $\langle v \mid u\rangle = 0$, i.e. $\langle v \mid u_F + u_G\rangle = \langle v \mid u_F\rangle + \langle v \mid u_G\rangle = 0$.

   Comme $v \in F^\perp \cap G^\perp$, on a $v \in F^\perp$, i.e. $\forall u' \in F \quad \langle v \mid u'\rangle = 0$. En particulier, $\langle v \mid u_F\rangle = 0$. De même, comme $v \in G^\perp$, on a $\langle v \mid u_G\rangle = 0$. Ainsi, $\langle v \mid u\rangle = 0$, donc $v \in (F+G)^\perp$.

   Finalement, $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.